

我是8位的

I am 8 bits, what about you?

随笔 - 205, 文章 - 0, 评论 - 103, 阅读 - 101万

导航

[博客园](#)
[首页](#)
[新随笔](#)
[联系](#)
[订阅](#) 
[管理](#)

2022年3月						
日	一	二	三	四	五	六
27	28	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	1	2
3	4	5	6	7	8	9

公告

你的支持是我的动力
欢迎关注微信公众号“我是8位的”



昵称：我是8位的
园龄：4年7个月
粉丝：288
关注：5
[+加关注](#)

盖楼抽奖

#她的梦想在发光#

HWD科技女性故事有奖征集

分享最打动的科技女性故事

活动时间：2022年3月8日-3月18日

[马上参与](#)

搜索

常用链接

[我的随笔](#)
[我的评论](#)
[我的参与](#)
[最新评论](#)
[我的标签](#)

积分与排名

积分 - 457097
排名 - 1198

单变量微积分笔记20——三角替换1 (sin和cos)

sin和cos的常用公式

基本公式：

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

半角公式：

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}$$

$$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}$$

微分公式：

$$d\sin x = \cos x dx$$

$$d\cos x = -\sin x dx$$

积分公式：

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

三角替换

示例1

$$\int \sin^n x \cos x dx = ?$$

根据微分公式， $\cos x dx = d\sin x$

$$\int \sin^n x \cos x dx = \int \sin^n x d\sin x$$

$$= \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C = \frac{\sin^{n+1} x}{n+1} + C$$

随笔分类 (211)

- ★★资源下载★★(1)
- Java并发编程(1)
- 程序员的数学(24)
- 单变量微积分(31)
- 多变量微积分(24)
- 概率(24)
- 机器学习(27)
- 软件设计(1)
- 数据分析(6)
- 数据结构与算法(27)
- 随笔(5)
- 线性代数(34)
- 项目管理(2)
- 转载(4)

随笔档案 (205)

- 2021年2月(1)
- 2020年3月(2)
- 2020年2月(6)
- 2020年1月(4)
- 2019年12月(7)
- 2019年11月(15)
- 2019年9月(3)
- 2019年8月(6)
- 2019年7月(1)
- 2019年6月(8)
- 2019年5月(3)
- 2019年4月(5)
- 2019年3月(7)
- 2019年2月(3)
- 2019年1月(7)
- 更多

阅读排行榜

- 1. 使用Apriori进行关联分析（一）(29768)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间(28772)
- 3. FP-growth算法发现频繁项集（一）——构建FP树(24430)
- 4. 寻找“最好”（2）——欧拉-拉格朗日方程(23099)
- 5. 多变量微积分笔记3——二元函数的极值(22772)

评论排行榜

- 1. 隐马尔可夫模型（一）(8)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间(7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2（点积）(7)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集（一）——构建FP树(5)
- 5. 寻找“最好”（2）——欧拉-拉格朗日方程(4)

推荐排行榜

- 1. 寻找“最好”（2）——欧拉-拉格朗日方程(7)
- 2. FP-growth算法发现频繁项集（一）——构建FP树(7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2（点积）(6)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集（二）——发现频繁项集(5)
- 5. 隐马尔可夫模型（一）(5)

最新评论

- 1. Re:线性代数笔记3——向量2（点积）
如果点积小于0，即夹角小于90°，这个写错了吧。应该是夹角大于90°
--猫猫猫猫猫大人

示例2

$$\int \sin^3 x \cos^2 x dx = ?$$
$$\begin{aligned} \int \sin^3 x \cos^2 x dx &= \int \sin^2 x \cos^2 x \sin x dx \\ &= \int (1 - \cos^2 x) \cos^2 x (-d\cos x) \\ &= \int (\cos^2 x - \cos^4 x) (-d\cos x) \\ &= \int (u^2 - u^4) (-du) \\ &= \frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} + C \\ &= \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C \end{aligned}$$

示例3

$$\int \sin^3 x dx = ?$$
$$\begin{aligned} \int \sin^3 x dx &= \int \sin^2 x \sin x dx \\ &= \int (1 - \cos^2 x) (-d\cos x) = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C \end{aligned}$$

半角公式

示例1

$$\int \cos^2 x dx = ?$$
$$\int \cos^2 x dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \int \frac{dx}{2} + \int \frac{\cos 2x}{2} dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C$$

示例2

$$\int \sin^2 x \cos^2 x dx = ?$$

解法1:

2. Re:线性代数笔记10——矩阵的LU分解写的很好，不过LU分解的前提是错的，LU分解只需要第三个条件，如果允许行置换就是下面写到的PLU，可以分解所有矩阵

--wiki3D

3. Re:单变量微积分笔记20——三角替换1 (sin和cos) 很nice

--尹保棕

4. Re:线性代数笔记24——微分方程和exp(At) 有些图片挂了呢

--ccchendada

5. Re:寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程

提个issue，最速降线中

\$v = \{2gh\}^{1/2}\$ 与配图不一致，建议以起点为原点，向右伸出x轴，向下伸出y轴建立坐标系

--trustInU

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \cos^2 x dx &= \int (\sin x \cos x)^2 dx \\&= \int \left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^2 dx \\&= \int \frac{\sin^2 2x}{4} dx \\&= \int \frac{1}{4} \left(\frac{1 - \cos 4x}{2}\right) dx \\&= \int \frac{dx}{8} - \int \frac{\cos 4x}{8} dx \\&= \frac{x}{8} - \frac{\sin 4x}{32} + C\end{aligned}$$

解法2:

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \cos^2 x dx &= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right) \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right) dx \\&= \int \left(\frac{1}{4} - \frac{\cos^2 2x}{4}\right) dx \\&= \int \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \times \frac{1 + \cos 4x}{2}\right) dx \\&= \int \left(\frac{1}{8} - \frac{\cos 4x}{8}\right) dx \\&= \frac{x}{8} - \frac{\sin 4x}{32} + C\end{aligned}$$

综合示例

示例1

$$\int \sin^3 x \sec^2 x dx = ?$$

$$\begin{aligned}\int \sin^3 x \sec^2 x dx &= \int (1 - \cos^2 x) \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right) \sin x dx \\&= \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} (-d\cos x) \\&= \int \frac{1 - u^2}{u^2} (-du) \\&= \int \left(\frac{1}{u^2} - 1\right) (-du) \\&= \int du - \int \frac{du}{u^2} \\&= u + \frac{1}{u} + C \\&= \cos x + \sec x + C\end{aligned}$$

示例2

$$\int \sin x \cos 2x dx = ?$$

$$\begin{aligned} \int \sin x \cos 2x dx &= \int (2\cos^2 x - 1) \sin x dx \\ &= \int (2\cos^2 x - 1)(-d\cos x) \\ &= \int (1 - 2u^2) du \\ &= u - \frac{2u^3}{3} + C \\ &= \cos x - \frac{2\cos^3 x}{3} + C \end{aligned}$$

示例3

$$\int \sin 2x \cos 3x dx = ?$$

三角函数和x的倍数都不一样，我们的目标是将x的倍数和三角函数转换为一致。

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$

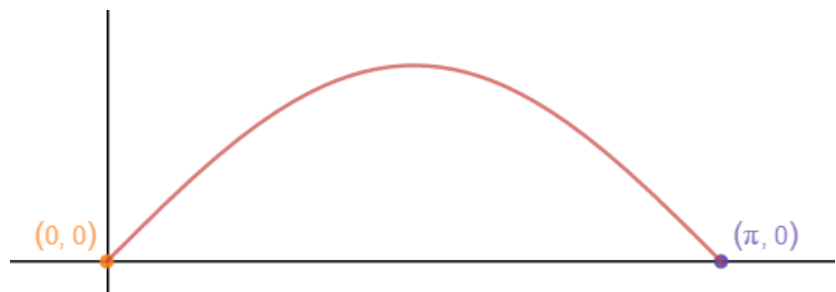
$$\cos 3x = \cos(2x + x)$$

$$\begin{aligned} &= \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x \\ &= (2\cos^2 x - 1)\cos x - (2\sin x \cos x)\sin x \\ &= 2\cos^3 x - \cos x - 2\sin^2 x \cos x \\ &= 2\cos^3 x - \cos x - 2(1 - \cos^2 x)\cos x \\ &= 2\cos^3 x - \cos x - 2(1 - \cos^2 x)\cos x \\ &= 4\cos^3 x - 3\cos x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \sin 2x \cos 3x dx &= \int (2\sin x \cos x)(4\cos^3 x - 3\cos x) dx \\ &= \int (2\cos x)(4\cos^3 x - 3\cos x)(-d\cos x) \\ &= \int 2u(4u^3 - 3u)(-du) \\ &= -\frac{8u^5}{5} + 2u^3 + C \\ &= -\frac{8\cos^5 x}{5} + 2\cos^3 x + C \end{aligned}$$

示例4

$y = \sin(ax)$ 绕x轴旋转一周， ax 的定义域是 $[0, \pi]$ ，求旋转后图形的体积。



根据圆盘法（圆盘法参见[数学笔记17——定积分的应用2（体积）](#)）：

$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^{\pi/a} \pi \sin^2(ax) dx \\
 &= \pi \int_0^{\pi/a} \frac{1 - \cos(2ax)}{2} dx \\
 &= \frac{\pi}{2} \left(\int_0^{\pi/a} dx - \int_0^{\pi/a} \cos(2ax) dx \right) \\
 &= \frac{\pi}{2} \left(x - \frac{\sin(2ax)}{2a} \right) \Big|_0^{\pi/a} \\
 &= \pi^2 / 2a
 \end{aligned}$$

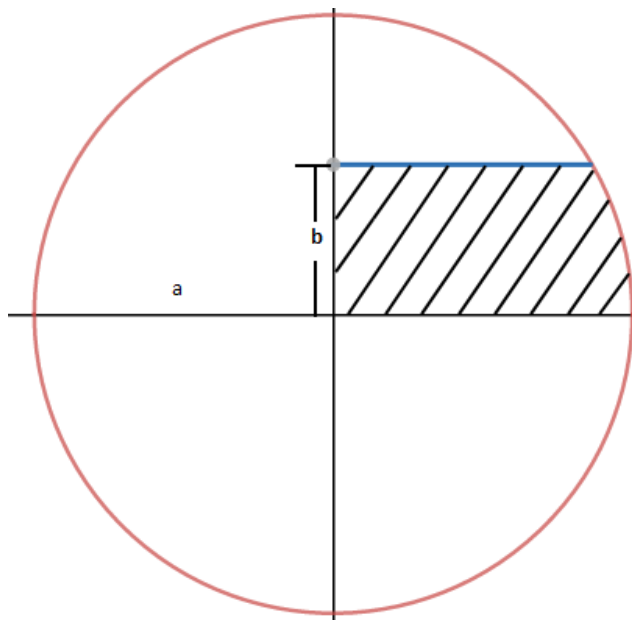
解法2：

$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^{\pi/a} \pi \sin^2(ax) dx \\
 &= \pi \int_0^{\pi/a} \sin^2(ax) dx \\
 u &= ax, dx = \frac{du}{a} \\
 \int_0^{\pi/a} \sin^2(ax) dx &= \int_{u=0}^{u=\pi} \frac{\sin^2 u}{a} du \\
 &= \frac{1}{a} \int_{u=0}^{u=\pi} \frac{1 - \cos 2u}{2} du \\
 &= \frac{1}{2a} \int_{u=0}^{u=\pi} (1 - \cos 2u) du \\
 &= \frac{1}{2a} \left(u - \frac{\sin 2u}{2} \right) \Big|_{u=0}^{u=\pi} \\
 &= \pi / 2a
 \end{aligned}$$

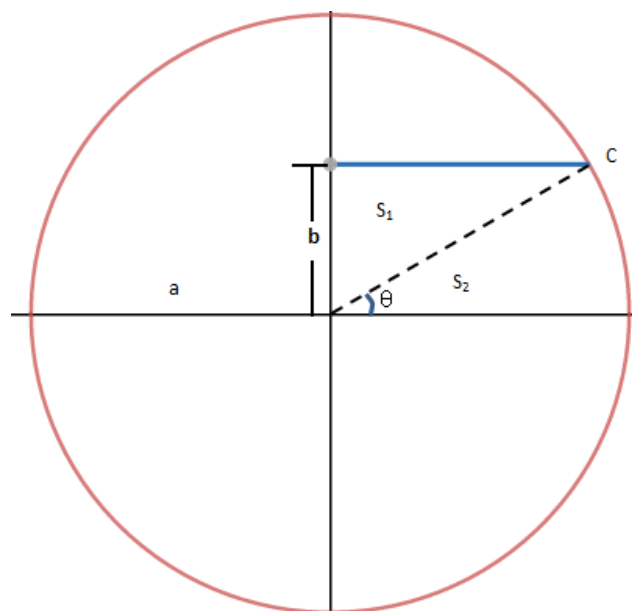
$$V = \pi \int_0^{\pi/a} \sin^2(ax) dx = \pi^2 / 2a$$

示例5

如下图所示，已知圆的半径a和线段长度b，求阴影部分的面积。



解法1, 使用中学数学的知识, 引一条与圆交于C点的辅助线, 所求面积就变成了三角形的面积 S_1 与扇形的面积 S_2 之和, 如下图所示:



通过圆的公式 $x^2 + y^2 = a^2$, 可知C的坐标是 $(\sqrt{a^2 - b^2}, b)$ 。

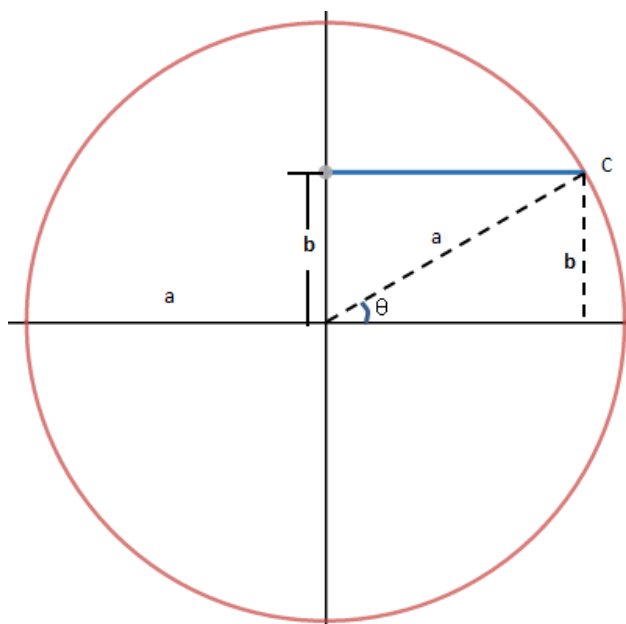
将上图映射到极坐标, 则 $x = a\cos\theta$, $y = a\sin\theta$, 在C点, $y = b = a\sin\theta$, $\theta = \arcsin(b/a)$

$$\begin{aligned}
 S &= S_1 + S_2 \\
 &= \frac{b\sqrt{a^2 - b^2}}{2} + \pi a^2 \times \frac{\arcsin(b/a)}{2\pi} \\
 &= \frac{b\sqrt{a^2 - b^2}}{2} + \frac{a^2 \arcsin(b/a)}{2} \\
 &= \frac{b\sqrt{a^2 - b^2}}{2} + \frac{a^2 \theta}{2}
 \end{aligned}$$

解法2, 使用定积分直接求解, 面积是:

$$S = \int_0^b f(y) dy = \int_0^b \sqrt{a^2 - y^2} dy$$

现在的问题变成了如何求解定积分。



如上图所示，与解法1一样引入极坐标， $x = a\cos\theta$ ， $y = a\sin\theta$ ，将 θ 写成关于 y 的函数， $\theta = \arcsin(y/a)$

$$\sqrt{a^2 - y^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 \theta} = \sqrt{a^2 (1 - \sin^2 \theta)} = a \cos \theta$$

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{da \sin \theta}{d\theta} = a \cos \theta, \quad dy = a \cos \theta d\theta$$

$$\int \sqrt{a^2 - y^2} dy = \int a \cos \theta a \cos \theta d\theta$$

$$= \int a^2 \cos^2 \theta d\theta$$

$$= a^2 \int \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta$$

$$= a^2 \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} \right) + C$$

$$= a^2 \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\sin \theta \cos \theta}{2} \right) + C$$

现在已经求得原函数，最后一步是求解定积分。可以将积分上下限替换成 θ 的表达式，也可将原函数的 θ 用 y 表示，这里使用第二种：

$$\begin{aligned} S &= \int_0^b \sqrt{a^2 - y^2} dy \\ &= a^2 \left(\frac{\arcsin(y/a)}{2} + \frac{\sin(\arcsin(y/a)) \times \cos(\sin(y/a))}{2} \right) \Bigg|_0^b \\ &= a^2 \left(\frac{\arcsin(b/a)}{2} + \frac{\sin(\arcsin(b/a)) \times \cos(\sin(b/a))}{2} \right) \\ &= a^2 \left(\frac{\theta}{2} + \frac{(b/a)(\sqrt{a^2 - b^2}/a)}{2} \right) \\ &= \frac{a^2 \theta}{2} + \frac{b\sqrt{a^2 - b^2}}{2} \end{aligned}$$

看起来积分并不是每次都能使问题简单，虽然得到了一个方便的表达式，但这个表达式求解起来可能很困难。

出处：微信公众号“我是8位的”

本文以学习、研究和分享为主，如需转载，请联系本人，标明作者和出处，非商业用途！

扫描二维码关注作者公众号“我是8位的”



随笔

分类: [单变量微积分](#)

标签: [三角替换](#), [半角公式](#)

好文要顶

关注我

收藏该文



我是8位的

关注 - 5

粉丝 - 288

[+加关注](#)

2

推荐

0

反对

« 上一篇: [单变量微积分笔记19——数值积分](#)

» 下一篇: [单变量微积分笔记21——三角替换2 \(tan和sec\)](#)

posted on 2017-11-15 22:57 我是8位的 阅读(7000) 评论(1) 编辑 收藏 举报

[刷新评论](#) [刷新页面](#) [返回顶部](#)

登录后才能查看或发表评论，立即 [登录](#) 或者 [逛逛](#) 博客园首页

【推荐】华为 HWD 2022 故事征集，分享最打动你的科技女性故事

【推荐】华为开发者专区，与开发者一起构建万物互联的智能世界

广告 X

JAVA Office文档在线编辑APIs

简单易用的Word, Excel, PowerPoint在线编辑接口

cloud.e-iceblue.cn

打开

编辑推荐:

- 革命性创新，动画杀手铜 @scroll-timeline
- 戏说领域驱动设计（十二）—— 服务
- ASP.NET Core 6框架揭秘实例演示[16]：内存缓存与分布式缓存的使用
- .Net Core 中无处不在的 Async/Await 是如何提升性能的？
- 分布式系统改造方案 —— 老旧系统改造篇

#她的梦想在发光#
HWD科技女性故事有奖征集
活动时间: 2022年3月8日~3月18日

最新新闻:

- 乔布斯的创业搭档：他缺乏工程师才能，不得不锻炼营销能力来弥补
 - 美国大厂码农薪资曝光：年薪18万美元，够养家，不够买海景房
 - 两张照片就能转视频！Google提出FLIM帧插值模型
 - Android 再推“杀手级”功能，可回收 60% 存储空间
 - 溺在理财暴雷潮的投资人：本金63万，月兑25元不够卖菜
- » 更多新闻...

Powered by:
博客园

Copyright © 2022 我是8位的
Powered by .NET 6 on Kubernetes